Μάθημα 21ο 04/05/2020.

Θεώρημα και τύπος Cauchy

Λήμμα 5.4.1 (Ολοκληρωτικό Λήμμα Goursat)

Έστω $D \subset \mathbb{C}$: ανοικτό, ένα σημείο $p \in \mathbb{C}$

$f : D \to \mathbb{C}$ συνεχής

Στο $D \setminus \{p\}$: ολόμορφη

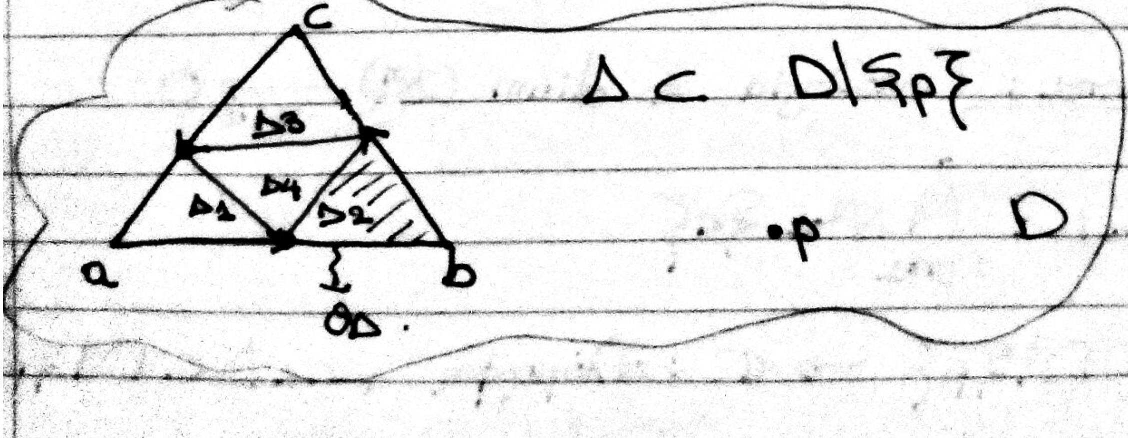
Τότε

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$: για κάθε συμπαγές τρίγωνο $\Delta \subset D$

- Εάν εμείς είχαμε ότι η f είναι ολόμορφη στο D, τότε έχουμε δει (από πριν, σε προηγούμενα μαθήματα) ότι: $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$: συμπαγές τρίγωνο Δ.

Εδώ, όμως δεν έχω ότι η f είναι ολόμορφη παντού.

Απόδειξη → Κοίτα στις σημειώσεις



$\operatorname{diam}(\Delta) \leq L(\partial\Delta)$.

$L(\partial\Delta') = \frac{1}{2} L(\partial\Delta)$.

Ισχυρισμός: $a(\Delta) = \int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta$ όπου $a(\Delta) = \sum_{i=1}^{4} a(\Delta_i) \Rightarrow$

$\Rightarrow a(\Delta) \le \sum_{i=1}^{4} |a(\Delta_i)|$

Έστω $|a(\Delta_i)| \le |a(\Delta_2)|$ για $i=1,2,3,4$

Θέτουμε $\Delta^1 = \Delta_2 \Rightarrow |a(\Delta)| \le 4|a(\Delta^1)|$

$\Rightarrow \boxed{\Delta^1 \supset \Delta^2 \supset \dots}$ Δ^i ανοιχτά, $\neq \emptyset$

$|a(\Delta)| \le 4^n |a(\Delta^n)|, n \in \mathbb{N}$

$\left[|a(\Delta)| \le 4|a(\Delta^1)|, \; |a(\Delta^1)| \le 4|a(\Delta^2)|, \dots \right]$

και $\boxed{diam(\Delta^n) \le L(\partial\Delta^n) = \frac{1}{2^n} L(\partial\Delta)}$

$\left[L(\partial\Delta^1) = \frac{1}{2} L(\partial\Delta), \right.$

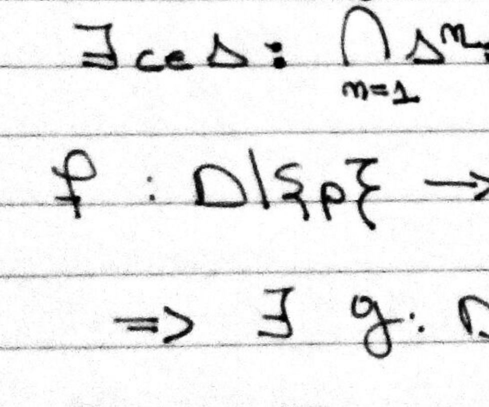
$\left. L(\partial\Delta^2) = \frac{1}{2} L(\partial\Delta^1), \dots \right]$

Προκύπτει: Τοπολογία $\Rightarrow diam(\Delta^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\exists c \in \Delta : \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^n = \{c\}$

$f : D\setminus\{p\} \to \mathbb{C}$: ολόμορφη, $c \in \Delta \subset D\setminus\{p\}$

$\Rightarrow \exists g : D\setminus\{p\} \to \mathbb{C}$ συνεχής με $g(c)=0$



$\lim_{z\to c} \frac{f(z)-f(c)}{z-c} = f'(c)$ (∃)

$\Rightarrow \lim_{z\to c} \overbrace{\frac{f(z)-f(c)-f'(c)(z-c)}{z-c}}^{g(z)} = 0$

με $g : D \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{C}$: συνεχής

$$\lim_{z \to c} \underbrace{\frac{f(z)-f(c)-f'(c)(z-c)}{z-c}}_{=g'(z)}$$

με $g(z) = \{ \quad \}$ για $z \neq c$, $g(c)=0$

$\Rightarrow g : D \setminus \{p\}$

$$|a(\Delta^n)| = \left| \int_{\partial\Delta^n} (z-c)\, g(z)\, dz \right|$$

$$\leq \int_{\partial\Delta^n} \underbrace{|z-c|}_{\leq diam(\Delta^n) \leq L(\partial\Delta^n)} g(z)\, dz \leq L(\partial\Delta^n) \underbrace{\int_{\partial\Delta^n} g(z) dz}_{\leq \|g\|_{\partial\Delta^n}}$$

ΟΧΙ ΣΩΣΤΗ ΓΡΑΦΗ

$\leq$

$$|a(\Delta^n)| = \left| \int_{\partial\Delta^n} (z-c) g(z) dz \right|$$

$$\leq L(\partial\Delta^n) \cdot \max\{ \underbrace{(z-c)g(z)}_{= \underbrace{|z-c|}_{\leq diam(\Delta^n) \leq L(\partial\Delta^n)} |g(z)|} \mid z \in \partial\Delta^n \}$$

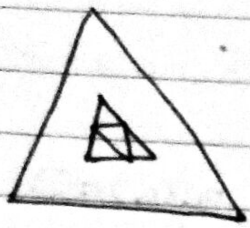
$$\leq L(\partial\Delta^n) \cdot L(\partial\Delta^n) \underbrace{\max\{|g(z)| . z \in \partial\Delta^n\}}_{= \|g\|_{\partial\Delta^n}}$$

$\Rightarrow |a(\Delta)| \leq 4^n |a(\Delta^n)|$

$$\leq L(\partial\Delta^n)^2 \|g\| = \left| \frac{1}{2^n} L(\partial\Delta) \right|^2 = \frac{1}{4^n} L(\partial\Delta)^2$$

$\le \cancel{4^n} \cdot \frac{1}{\cancel{4^n}} \; L(\partial\Delta)^2 \|g\|_{\Delta^n}$

$\Rightarrow |a(\Delta)| \le L(\partial\Delta)^2 \|g\|_{\Delta^n}$



Σκεφτείτε και εκτιμήστε
$c \in \Delta^n, \forall n, \{c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^n$

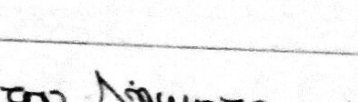
$\Delta^1 \supset \Delta^2 \supset$

$g : \Delta^1 \to \mathbb{C}$: συνεχής με $g(c) = 0$
$\Rightarrow \|g\|_{\Delta^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

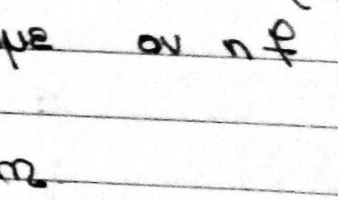
Προσοχή : Η διαφορά αυτού του Λήμματος με τα Θεωρήματα / Προτάσεις για ολικά ανεξάρτητα του δρόμου Είναι ότι εδώ δεν γνωρίζουμε αν η f είναι ολοκληρώσιμη !
Γνωρίζουμε ότι είναι διαφορίσιμη.

Απόδειξη Λήμματος Goursat
Βήματα

1ο βήμα: $\Delta \subset D \setminus \{p\}$



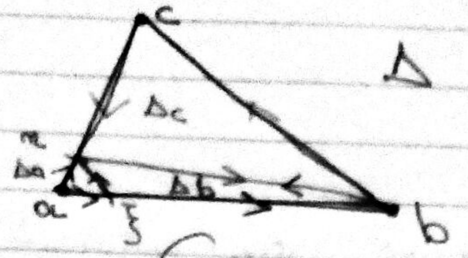
2ο βήμα : p: κορυφή του Δ



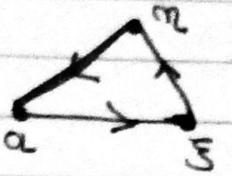
$p = a$, $\varepsilon > 0$, $\xi \in [a,b]$,
$\eta \in [a,c]$ με $0 < |a - \xi|, |a - \eta| < \varepsilon$

$\Delta = \Delta[a,b,c]$, $\Delta_a := \Delta[a,\xi,\eta]$

$\Delta_b = \Delta[\eta, \xi, b]$, $\Delta_c = \Delta[\eta, b, c]$



(Zoom) :



$$\alpha(\Delta) = a(\Delta_a) + a(\underbrace{\Delta_b}_{\text{δεν έχει κοινή την κορυφή η}}) + a(\underbrace{\Delta_c}_{\text{δεν έχει κοινή την κορυφή η}}).$$

Άρα $\alpha(\Delta) = a(\Delta_a) + 0 + 0$

$$\Rightarrow a(\Delta) = a(\Delta_a)$$

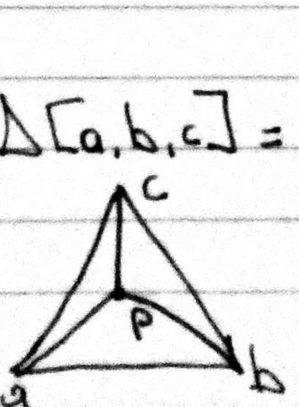
$$\Rightarrow |a(\Delta)| = |a(\Delta_a)| = \left|\int_{\partial\Delta_a} f(z)\,dz\right| \le$$

$$\le \underbrace{\|f\|_{\Delta_a}}_{\le \|f\|_{\Delta}} \; \underbrace{L(\partial\Delta_a)}_{= |\xi - a| + \underbrace{|\eta-\xi|}_{\le \underbrace{|\eta - a|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|a-\xi|}_{<\varepsilon}} + |a-\eta|}$$

$$\le \|f\|_{\Delta} \, 4\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

3° βήμα

$$\Delta = \Delta[a,b,c] = \Delta[p,a,b] \cup \Delta[p,b,c] \cup \Delta[p,c,a]$$



$$\Rightarrow a(\Delta) = \sum_{i=1}^{2} \underbrace{a(\Delta_i)}_{=0} = 0 .$$

<u>4º βήμα</u>

$p \in$ πλευρά του τριγώνου π.χ. $p \in [a, c]$, $p \neq a, c$